inspection académique
seine-saint-denis

STAGE DE REUSSITE « MATHEMATIQUES »

PROPOSITIONS DE SITUATIONS D'ENTRAINEMENT (CM2)

DOCUMENT POUR L'ENSEIGNANT

Vacances de printemps

(du mardi 23 avril au vendredi 26 avril 2019)

De manière générale, les types de difficultés que peuvent rencontrés les élèves en mathématiques à l'entrée en sixième sont liées à :

- des mécanismes peu automatisés (calcul mental, calcul en ligne, techniques opératoires),
- des difficultés à la lecture et à la compréhension des énoncés de problèmes,
- des difficultés à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève.

Ce stage doit être l'occasion de mettre les élèves en situation de réussite à partir de supports simples. La remise en confiance est primordiale et les échanges oraux, la verbalisation et l'argumentation à mettre en exergue.

Un travail explicite sur les procédures utilisées dans les diverses situations proposées devrait pouvoir être réinvesti dans les activités de classe tout en restant dans une continuité et une progressivité au niveau des apprentissages.

Organiser le temps

Voici une grille horaire pour les enseignements en mathématiques. Celle-ci est une proposition qui reste adaptable en fonction des difficultés repérées chez les élèves. Cette organisation du temps part du principe que la moitié du temps imparti pendant ce stage peut être consacré à la maîtrise de la langue tandis que l'autre moitié concerne les mathématiques.

Le contenu des enseignements proposés cible les difficultés récurrentes rencontrées par les élèves en mathématiques et met en avant les dernières recommandations institutionnelles visant la réussite de tous les élèves.

<table>
<tr><th></th><th>Mardi</th><th>Mercredi</th><th>Jeudi</th><th>Vendredi</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Mathématiques</td><td colspan="4"><u>10 minutes</u> : Calcul mental systématique
Rebrassage de faits numériques et de procédures élémentaires de calcul.

<u>25 à 30 minutes</u> : Calcul mental en ligne
Calculer un résultat en s'appuyant sur la connaissance des nombres entiers ou décimaux et les propriétés des opérations.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>40 minutes</u> : Résolution de problèmes
Environ 10 à 12 problèmes à choisir parmi la liste proposée.
- Phase de verbalisation permettant la compréhension de l'énoncé.
- Elaboration d'une stratégie pour résoudre le problème et mise en œuvre de celle-ci.
- Synthèse des étapes et procédures possibles aboutissant à la résolution.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>20 minutes</u> : Conforter les techniques
Suite à la résolution des problèmes proposés, il peut être nécessaire de revenir sur la représentation des nombres et certains mécanismes opératoires.</td></tr>
</table>

<u>Temps global en mathématiques</u> : 1h35min à 1h40min

Rappel des horaires : 8h30 – 12h15 (3h45 par jour – 15 minutes pour le temps de récréation)

1. Le calcul mental ou en ligne

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux	Mobiliser les faits numériques mémorisés au cycle 2, notamment les tables de multiplication jusqu'à 9.
	Connaître des procédures élémentaires de calcul, notamment : • multiplier ou diviser un nombre décimal par 10, par 100, par 1000 ; • rechercher le complément à l'entier supérieur ; • multiplier par 5, par 25, par 50, par 0,1, par 0,5.
	Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité).
	Utiliser ces propriétés et procédures pour élaborer et mettre en œuvre des stratégies de calcul.
	Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.

Le calcul mental et le calcul en ligne vivent indépendamment mais se nourrissent mutuellement :

- les habiletés développées en calcul mental sont au service du calcul en ligne, elles donnent progressivement accès au traitement en ligne de calculs de plus en plus complexes ;
- le calcul en ligne peut aussi être vu comme une étape dans le développement du calcul mental ; le fait d'écrire certaines étapes de calcul permet en effet de libérer la mémoire de travail, favorisant ainsi l'entrée dans le calcul mental pour tous les élèves. Le calcul en ligne ne se limite toutefois pas à cette conception, certains calculs proposés en ligne ne peuvent en effet pas être gérés de façon purement mentale.

Le calcul en ligne n'est pas une autre manière d'écrire un calcul posé. Le calcul posé repose sur une technique, un algorithme. Le calcul en ligne repose sur la compréhension de la notion de nombre, du principe de la numération décimale de position et des propriétés des opérations.

Comme le calcul mental, le calcul en ligne permet à l'élève d'utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre et sur les propriétés des opérations. L'élève est ainsi amené à « faire parler » les nombres, c'est à dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération.

Pratiques possibles de calcul en ligne à proposer sur les différentes journées :

Effectue en ligne :
- 523 - 67
- 13 x 54
- 2 unités et 57 centièmes + 5 unités et 8 dixièmes
- 45 x 21
- 6 x 18
- 3,06 x 100
- 24 x 50
- 0,64 : 4
- 34 : 5
- 56 : 100
- Etc…

Il est préférable de ne pas proposer ces calculs simultanément, mais de les ventiler sur plusieurs séances, en gardant trace des résultats.

Vous trouverez ci-dessous une suggestion de répartition sur la semaine des divers calculs proposés avec un temps en amont de rebrassage systématique de faits numériques à connaître afin les mobiliser lors des calculs.

Deux situations de référence sont proposées chaque jour et amènent à différencier les propositions de calcul en fonction des réussites ou difficultés des élèves. Il est alors possible d'envisager deux sous-groupes d'élèves : un sous-groupe en autonomie avec des calculs de la même difficulté que la situation de référence et un sous-groupe avec des calculs de difficulté moindre et un étayage de l'enseignant qui fait expliciter les procédures de calcul.

Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
REBRASSAGE Tables de multiplication Décompositions additives Compléments à 10 Compléments à 100	**REBRASSAGE** Tables de multiplication Multiples de 5 et de 50 Multiplier un nombre entier par 10, par 100	**REBRASSAGE** Tables de multiplication Multiples de 5 et de 50 Multiplier un nombre entier ou décimal par 10	**REBRASSAGE** Tables de multiplication Multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10 Double et moitié d'un nombre entier ou décimal
Situation de référence **523 – 67 =** 2 niveaux de difficulté possibles en fonction des réponses données : Si difficulté, proposer : 430 – 80 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 635 – 58 = 851 – 94 =	Situation de référence **13 X 54 =** Si difficulté, proposer : 13 X 5 = 25 X 6 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 38 X 12 = 27 X 15 =	Situation de référence **3,06 X 100 =** Si difficulté, proposer un outil : ***Le glisse-nombre*** et voir avec les élèves l'utilisation de cet outil. Si pas de difficulté, en autonomie : 13,5 X 100 = 7,90 X 10 = 56,8 X 100 =	Situation de référence **0,64 : 100 =** Si difficulté, proposer : 86 : 4 = 300 : 4 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 4,86 : 4 = 300,4 : 4 =
Situation de référence **634 – 51 =** Si difficulté, proposer : 263 – 70 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 746 – 77 = 263 – 85 =	Situation de référence **13 X 54 =** Si difficulté, proposer : 6 X 18 = 13 X 4 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 28 X 43 = 52 X 26 =	Situation de référence **56 : 100 =** Si difficulté, proposer un outil : ***Le glisse-nombre*** et voir avec les élèves l'utilisation de cet outil. Si pas de difficulté, en autonomie : 124 : 100 = 75 : 100 = 310 : 100 =	Situation de référence **0,64 : 100 =** Si difficulté, proposer : 90 : 5 = 14 : 5 = et voir avec les élèves les procédures possibles. Si pas de difficulté, en autonomie : 24 : 5 = 38 : 5 = 123 : 5 =

Exemples de procédures possibles

Ces exemples montrent un panel de stratégies mobilisées par les élèves qui pratiquent régulièrement le calcul en ligne ; ils doivent être perçus comme des pistes de mise en œuvre, sans volonté d'exhaustivité.

523 – 67 = ?	
Un élève écrit : 523 – 67 = 523 – 7 – 60 = 516 – 60 = 456	L'élève a choisi de soustraire 67 en deux temps : d'abord 7 puis 60.
Un autre élève écrit : 523 – 67 = 526 – 70 = 556 – 100 = 456	Il ajoute 3, puis 30 à chacun des deux nombres, le résultat ne change pas (conservation des écarts : le résultat ne change pas lorsqu'on ajoute le même nombre aux deux termes d'une différence), mais la soustraction devient beaucoup plus simple à effectuer. La justification « complète » pourrait s'écrire : 523 – 67 = (523 + 3) – (67 + 3) = 526 – 70 = (526 + 30) – (70 + 30) = 556 – 100 = 456 Produire cette écriture en autonomie ne relève pas du cycle 3.
Un troisième élève écrit : 523 – 67 = 520 – 64 = 520 + 36 – 100 = 456	L'élève a choisi de soustraire d'abord 3 aux deux termes, puis de leur ajouter le complément à 100 de 64 ; la justification de sa stratégie pourrait s'écrire : 523 – 67 = (523 – 3) – (67 – 3) = 520 – 64 = (520 + 36) – (64 + 36) = 556 – 100 = 456 Produire cette écriture en autonomie ne relève pas non plus du cycle 3.
Un quatrième élève écrit : 523 – 20 = 503 – 40 = 463 – 3 = 460 – 4 = 456	Cet élève a une démarche correcte puisqu'il enlève successivement 20, 40, 3 puis 4 au nombre de départ, ce qui revient à enlever 67. Mais l'écriture mathématique avec une utilisation erronée du symbole « = » n'est pas correcte. Il vaudrait mieux qu'il transcrive sa stratégie par des calculs séparés, par exemple de la façon suivante : 523 – 20 = 503 ; 503 – 40 = 463 ; 463 – 3 = 460 ; 460 – 4 = 456
Un cinquième élève écrit : 523 – 67 = 33 + 423 = 456	La démarche et l'écriture sont ici correctes Il est cependant difficile d'être certain de la démarche suivie à partir de cette seule trace écrite. L'élève a peut-être utilisé les compléments à 100. 33+67=100. Soustraire 67 revient donc à soustraire 100 et ajouter 33. Il a peut-être utilisé le fait que la différence entre 523 et 67 est le nombre à ajouter à 67 pour obtenir 523 et ce nombre est la somme du nombre à ajouter à 67 pour obtenir 100 et du nombre à ajouter à 100 pour obtenir 523.

13 × 54 = ?	
Un élève écrit : 13 × 54 = 540 + 3 × 54 = 540 + 150 + 3 × 4 = 690 + 12 = 702	L'élève utilise la distributivité. La justification complète s'écrit : 13 × 54 = (10 + 3) × 54 = 10 × 54 + 3 × 54 = 540 + 3 × (50 + 4) = 540 + 3 × 50 + 3 × 4 = 540 + 150 + 12 = 690 + 12 = 702
Un autre élève écrit : 13 × 54 = 13 × 50 + 13 × 4 = 650 + 40 + 12 = 702	Cet élève a mémorisé le résultat du produit 13 × 5. Il décompose 54 pour faire apparaître 13 × 50 en utilisant la distributivité.

Objectifs

Le calcul en ligne est une source importante d'apprentissages mathématiques essentiels. Il permet, comme le calcul posé, de produire le résultat d'un calcul, mais bien au-delà de cet objectif, **en articulation avec le calcul mental**, il participe :

- au développement des six « compétences travaillées » déclinées dans les programmes de mathématiques et plus particulièrement à celui des compétences Calculer, Chercher, Représenter et Raisonner (se référer au document « Le calcul aux cycles 2 et 3 » qui explicite en quoi le calcul participe au développement de ces six compétences) ;

- à la compréhension de la notion de nombre entier, de fraction et de nombre décimal, ainsi que de la numération de position (travailler les diverses décompositions possibles d'un nombre favorise l'accès au sens du nombre et aux relations entre les nombres) ;

- à la compréhension des différentes écritures d'un même nombre (écritures diverses d'un nombre décimal par exemple), en motivant leur utilisation ;

- à la compréhension progressive des propriétés des opérations en favorisant leur utilisation (il est attendu des élèves qu'ils manipulent ces propriétés en situation et qu'ils les explicitent avec leurs mots ; les dénominations données ci-dessous ne sont pas des objectifs d'apprentissage pour les élèves) :
  - commutativité de l'addition et de la multiplication (un élève peut dire, par exemple : « dans une addition ou une multiplication, on peut changer l'ordre des termes») : $5 + 7 = 7 + 5$,
    $3 \times 8 = 8 \times 3$;
  - associativité de l'addition et de la multiplication (un élève peut dire, par exemple : « dans une addition ou une multiplication, on peut regrouper les termes comme on veut »):
    $7 + 3 = 2 + 8$ car $(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3)$,
    $24 \times 5 = 12 \times 10$ car $(12 \times 2) \times 5 = 12 \times (2 \times 5)$;
  - distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction (un élève peut dire, par exemple : « quand on multiplie une somme de deux nombres, cela revient à multiplier chacun des termes ») :
    $8 \times 13 = 8 \times (10 + 3) = (8 \times 10) + (8 \times 3) = 80 + 24 = 104$,
    ou $8 \times 13 = (10 - 2) \times 13 = (10 \times 13) - (2 \times 13) = 130 - 26 = 104$;
  - distributivité de la division sur l'addition et la soustraction (un élève peut dire, par exemple :
    « quand on divise une somme de deux nombres, cela revient à diviser chacun des termes ») :
    $536 \div 8 = (480 + 56) \div 8 = (480 \div 8) + (56 \div 8) = 60 + 7 = 67$,
    $536 \div 8 = (560 - 24) \div 8 = (560 \div 8) - (24 \div 8) = 70 - 3 = 67$;

    Attention, contrairement à la distributivité de la multiplication, la distributivité de la division n'est vraie que dans un sens : $384 \div 12$, par exemple, est égal à $(360 \div 12) + (24 \div 12)$ mais n'est pas égal à $(384 \div 10) + (384 \div 2)$; on ne peut décomposer que le nombre qu'on divise (dividende) et non celui par lequel on divise (diviseur) ;

- à la connaissance de propriétés relatives aux opérations, pouvant faciliter le calcul mental ou en ligne en permettant de créer des étapes intermédiaires :
  - division par un produit :

diviser par 12, c'est diviser par 2 puis encore par 2, puis par 3, car 2 × 2 × 3 = 12
504 ÷ 12 = [(504 ÷ 2) ÷ 2] ÷ 3 = (252 ÷ 2) ÷ 3 = 126 ÷ 3 = 42 ;

- conservation de l'écart pour la soustraction : 234 – 83 = 231 – 80 = 251 – 100 = 151
ou 234 – 83 = (234 + 17) – (83 + 17) = 251 – 100 = 151
13,4 – 0,56 = 13,44 – 0,6 = 13,84 – 1 = 12,84 ;
l'écart entre les deux nombres (résultat de la soustraction) ne change pas quand on leur ajoute ou soustrait le même nombre ;
- conservation du rapport pour la division (à envisager de façon très progressive en fin de cycle 3 pour préparer l'apprentissage du quotient des nombres décimaux et de l'égalité des nombres rationnels au cycle 4) :
34 ÷ 5 = 68 ÷ 10 = 6,8
5,82 ÷ 0,2 = 582 ÷ 20 = 291 ÷ 10 = 29,1 ;
- le résultat de la division ne change pas quand on multiplie ou divise le dividende et le diviseur par le même nombre ;

- à la compréhension progressive de la signification du signe « = », à concevoir comme équivalence entre le membre écrit à gauche et le membre écrit à droite, et pas seulement pour donner le résultat d'un calcul ;
- à la compréhension progressive de la signification des parenthèses et de leur utilisation pour écrire un calcul complexe ;
- à la mémorisation progressive de faits numériques et de stratégies de calcul qui seront ensuite mis en œuvre pour traiter des situations plus complexes en calcul mental et en ligne ;
- au développement de compétences relatives au calcul d'ordre de grandeur ;
- au développement de l'agilité numérique mentale des élèves, de leurs habiletés calculatoires et de l'intelligence du calcul (anticiper, faire des choix, contrôler, …) ;
- au développement de l'aptitude à prendre des initiatives ;
- à la motivation des élèves en rendant le calcul à la fois stratégique et automatique.

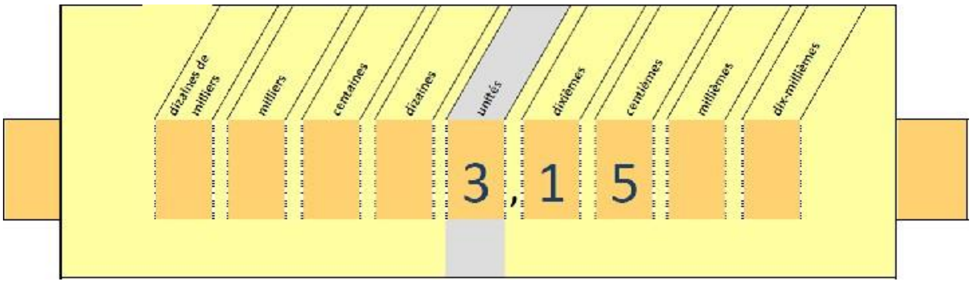
Fractions et nombres décimaux au cycle 3 : *Le glisse-nombre*

Le « glisse-nombre » est un outil permettant d'illustrer le fait que lorsque l'on multiplie ou divise un nombre par une puissance de 10 ce n'est pas la virgule qui se déplace mais les chiffres qui composent le nombre qui prennent une valeur 10 fois supérieure ou 10 fois inférieure.

RAPPEL

« Utiliser la même règle de multiplication par 10, 100, 1000 avec les entiers et avec les nombres décimaux : multiplier par 10, c'est donner à chaque chiffre une valeur 10 fois plus grande, le chiffre des unités devient donc le chiffre des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc. 12,37 c'est 12 unités, 3 dixièmes et 7 centièmes 12,37 × 10 c'est donc 12 dizaines, 3 unités et 7 dixièmes, donc 123,7. Il est important que les élèves ne construisent pas la représentation d'une virgule qui se déplace. En l'occurrence, ce sont les chiffres qui se « déplacent ».

Le glisse-nombre

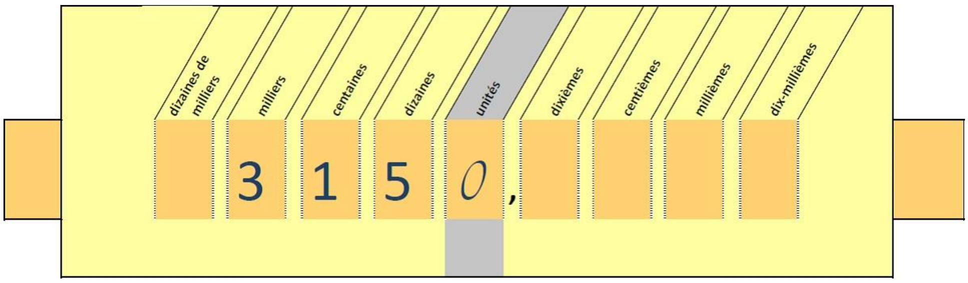


L'outil présente l'avantage de donner à voir, physiquement, les chiffres se déplacer dans la colonne de gauche où leur valeur sera dix fois plus grande, ou dans la colonne de droite où leur valeur sera dix fois plus petite et permet ainsi d'éviter que les élèves construisent des procédures erronées conduisant à des erreurs régulièrement rencontrées comme 3,15 × 10 = 30,15 ou encore 3,15 × 10 = 3,150.

Premier exemple : 3,15 × 1000

Chaque chiffre prend une valeur 1000 fois supérieure : 3 unités deviennent 3 milliers, 1 dixième devient 1 centaine et 5 centièmes deviennent 5 dizaines.

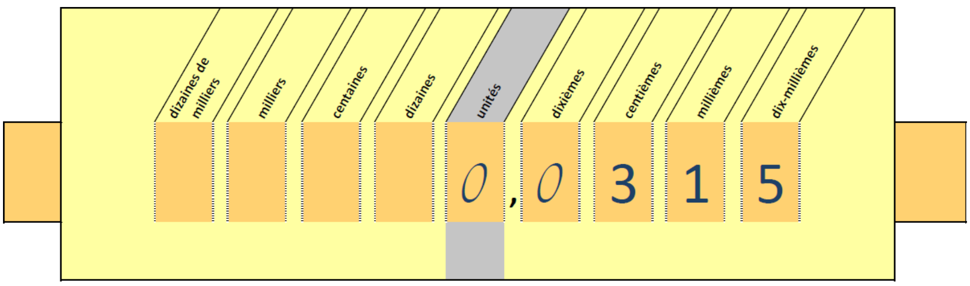
Il est nécessaire d'introduire un 0 pour marquer l'absence d'unité.



Deuxième exemple : 3,15 ÷ 100

Chaque chiffre prend une valeur 100 fois inférieure : 3 unités deviennent 3 centièmes, 1 dixième devient 1 millième et 5 centièmes deviennent 5 dix-millièmes. Le nombre peut se lire « Trois cent quinze dix-millièmes ».

Il est nécessaire d'introduire des 0 pour marquer l'absence d'unité et de dixièmes.



Voir annexe 1 : modèle de glisse-nombre à imprimer

2. La résolution de problème

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions, des nombres décimaux et le calcul	Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations : • sens des opérations ; • problèmes à une ou plusieurs étapes relevant de structures additives et/ou multiplicatives.
	Organisation et gestion de données Prélever des données numériques à partir de supports variés. Organiser des données issues d'autres enseignements en vue de les traiter.
	Proportionnalité Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité. Appliquer un pourcentage.

La résolution de problèmes doit être au cœur de l'activité mathématique des élèves tout au long de la scolarité obligatoire. Elle participe du questionnement sur le monde et de l'acquisition d'une culture scientifique, et par là contribue à la formation des citoyens. Elle est une finalité de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, mais aussi le vecteur principal d'acquisition des connaissances et des compétences visées.

La mise en place d'un **enseignement construit** est nécessaire pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. Cela nécessite de conduire **un travail structuré et régulier** pour faire acquérir aux élèves les connaissances et compétences leur permettant :

- de comprendre le problème posé ;
- d'établir une stratégie pour le résoudre, en s'appuyant sur un schéma ou un tableau, en décomposant le problème en sous-problèmes, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver, en faisant des analogies avec un modèle connu ;
- de mettre en œuvre la stratégie établie ;
- de prendre du recul sur leur travail pour s'assurer de la pertinence de ce qui a été effectué et du résultat trouvé, que pour repérer ce qui a été efficace et ce qui ne l'a pas été afin de pouvoir en tirer profit pour faire des choix de stratégies lors de futures résolutions de problèmes.

Deux ensembles de problèmes sont proposés aux élèves : des problèmes en une étape *(problèmes n°1, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16)*, briques élémentaires sur lesquelles pourront s'appuyer les élèves pour résoudre les problèmes en plusieurs étapes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires *(problèmes n°2, 4, 5, 9, 11, 13, 15)*. L'objectif visé est de ne pas laisser les élèves penser que résoudre des problèmes se limite à « trouver la bonne opération » ou « avoir de la chance » en prenant les deux nombres de l'énoncé et en choisissant une opération au hasard.

Énoncé du problème n°1 :

> *M. Durand s'achète 5 paires de chaussures à 85,25 euros la paire.*
> *Quel sera le montant de son achat ?*

Énoncé du problème n°2 :

> *Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7,5 euros. Au rayon des surgelés, les escargots coûtent 4 euros la douzaine, les petits pois 12 euros le kg et les framboises 6 euros le kg.*

Manon achète 12 escargots et 4 kg de petits pois. Combien a-t-elle dépensé ?

Énoncé du problème n°3 :

> *M. Durand possède 250 euros. Il veut s'acheter des paires de chaussettes à 6 euros la paire. Combien de paires de chaussettes pourrait-il s'acheter ?*

Énoncé du problème n°4

> *Laurie a acheté deux livres à 12,30 euros. Elle a payé avec un billet de 50 euros.*
>
> *Quelle somme lui a-t-on rendue ?*

Énoncé du problème n°5 :

> *Mme Dupont élève des poules pour produire des œufs. Elle récolte ainsi 125 œufs chaque matin. Le dimanche, elle vend ses œufs dans des boîtes de 6 qu'elle vend 4,5 euros chacune.*
>
> *Combien d'euros gagne Mme Dupont chaque dimanche si elle vend toutes les boîtes (complètes) ?*

Énoncé du problème n°6 :

> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut :*
>
> *6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 24 personnes ?

Énoncé du problème n°7 :

> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut :*
>
> *6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 6 personnes ?

Énoncé du problème n°8 :

> Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.
>
> *Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 45 personnes ?*

Énoncé du problème n°9 :

> *Au marché, un kilogramme de fraises vaut 12€. Combien valent alors : 500 g de fraises ? 200 g de fraises ? 2 kg 250 g de fraises ?*

Énoncé du problème n°10 :

> *Si 5 litres d'essence coûtent 8 euros, combien coûtent 15 litres d'essence ?*

Énoncé du problème n°11 :

> *La recette pour un dessert au chocolat nécessite pour 4 personnes :*
> *100 g de sucre, 60 g de chocolat, 1 litre de lait.*
>
> *Quelle quantité de chaque ingrédient faudrait-il pour confectionner ce dessert pour 6 personnes ? 5 personnes ?*

Énoncé du problème n°12 :

> *Un pâtissier a réalisé 237 petits fours. Il les range en remplissant des boîtes qui peuvent contenir 16 petits fours chacune.*

Combien de petits fours reste-t-il ?

Énoncé du problème n°13 :

> *Julie a payé 20 euros pour 4 œufs en chocolat. Sa cousine Estelle veut en acheter 6.*
>
> *Combien Estelle va-t-elle payer ?*

Énoncé du problème n°14 :

> *Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm.*
>
> *Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2000 de ces mêmes feuilles ?*

Énoncé du problème n°15 :

> *Une classe compte 27 élèves. Le maître distribue trois cahiers par élève. Il lui reste 19 cahiers. Combien le maître avait-il de cahiers avant cette distribution ?*

Énoncé du problème n°16 :

> *Les pommes sont vendues par sacs de 5 kg. Quel est le nombre de sacs nécessaires pour acheter 80 kg de pommes ?*

La mise en œuvre

L'enseignement de la résolution de problèmes peut s'appuyer sur des temps d'échanges collectifs, permettant d'émettre des hypothèses, d'élaborer collectivement des stratégies, de confronter des idées et d'en débattre, de proposer des méthodes de résolution ou encore de soumettre à la classe des problèmes créés par les élèves eux-mêmes. Ces temps collectifs permettent également de contribuer à développer une meilleure expression orale des élèves. Néanmoins, lors des séances de résolution de problèmes, **la priorité doit être donnée aux temps pendant lesquels les élèves résolvent effectivement eux-mêmes des problèmes.**

Deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes : « Modéliser » et « calculer »

Ces deux compétences doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- <u>difficultés à « modéliser »</u> : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- <u>difficultés à « calculer »</u> : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

La compétence « raisonner » est également fondamentale :

- résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement ;
- progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.

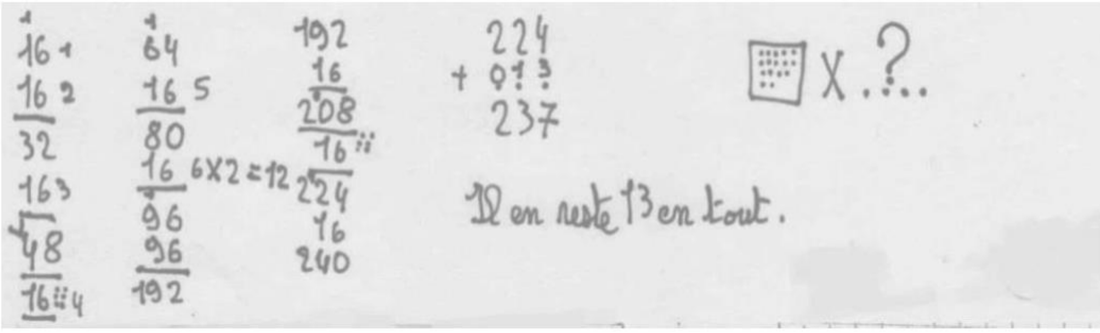
Exemples de productions d'élèves :

Énoncé du problème n°9 :

> *Un pâtissier a réalisé 237 petits fours. Il les range en remplissant des boîtes qui peuvent contenir 16 petits fours chacune.*
>
> *Combien de petits fours reste-t-il ?*

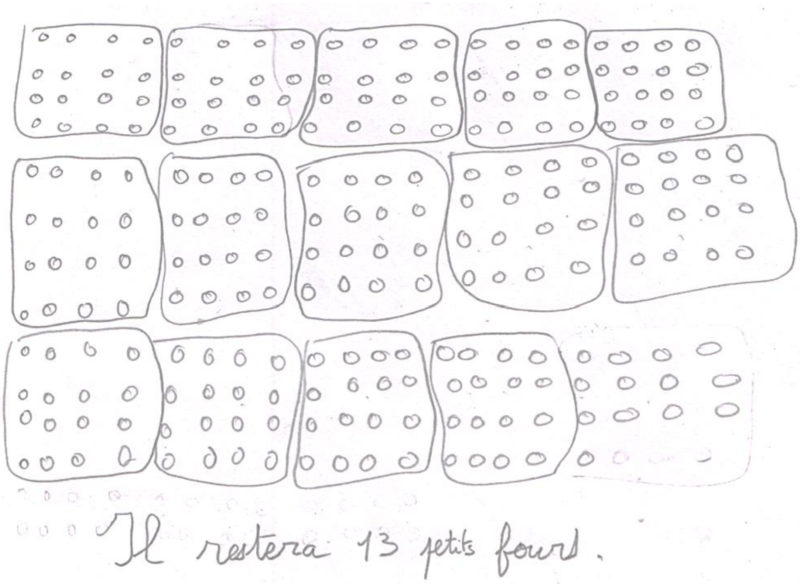
Les élèves sont invités à laisser des traces de leur démarche sur leur cahier ou tout autre support. Plusieurs critères de réalisation sont appréciés : la situation est traitée en utilisant un schéma, la situation est modélisée par une opération ou une suite d'opérations adaptées (quelles qu'elles soient), le résultat est interprété en lien avec la question posée et au regard de la pertinence du résultat.

- Production 1



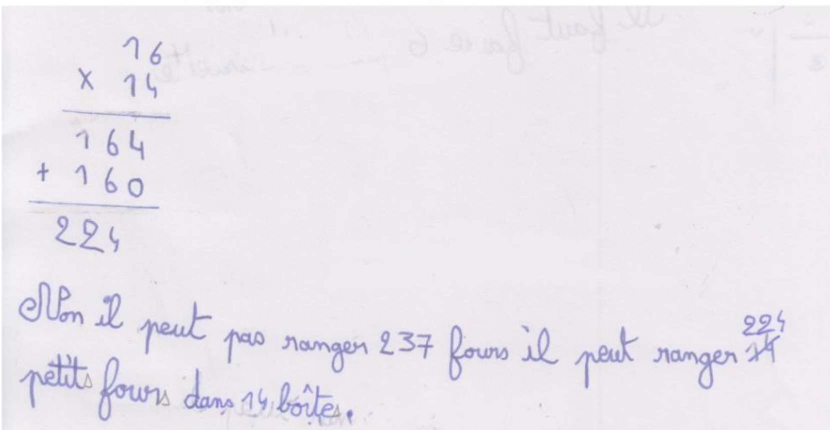
Réponse trouvée par additions itérées. Modélisation et interprétation du résultat correctes.

- Production 2



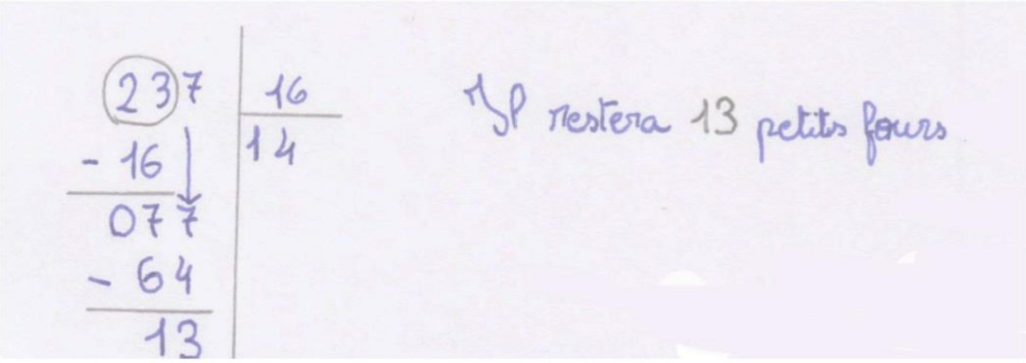
Réponse trouvée par regroupements en paquets de 16 petits fours.

- Production 3



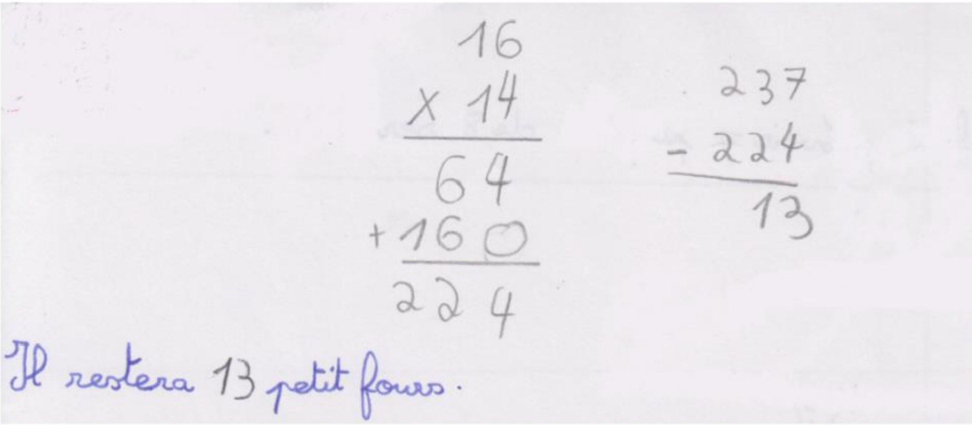
Réponse trouvée par multiplication, sans erreur de calcul. Modélisation correcte mais le résultat ne correspond pas à la question posée.

- Production 4



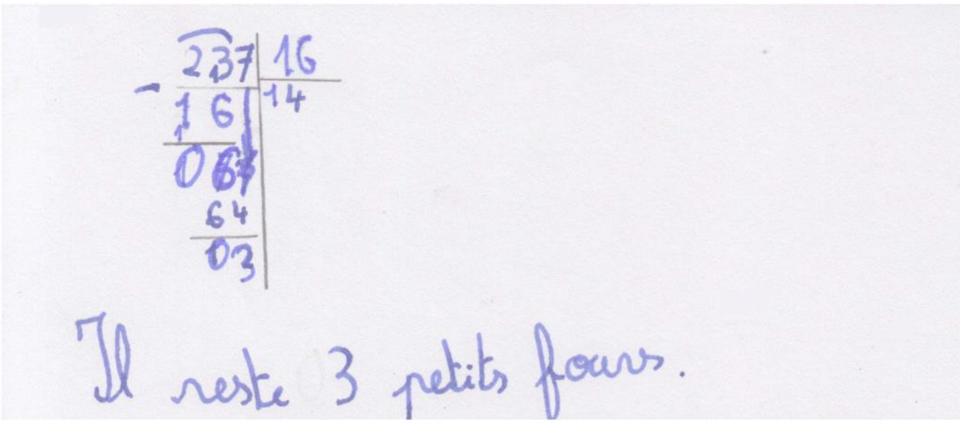
Réponse trouvée par division, sans erreur de calcul. Modélisation et interprétation du résultat correctes.

- Production 5



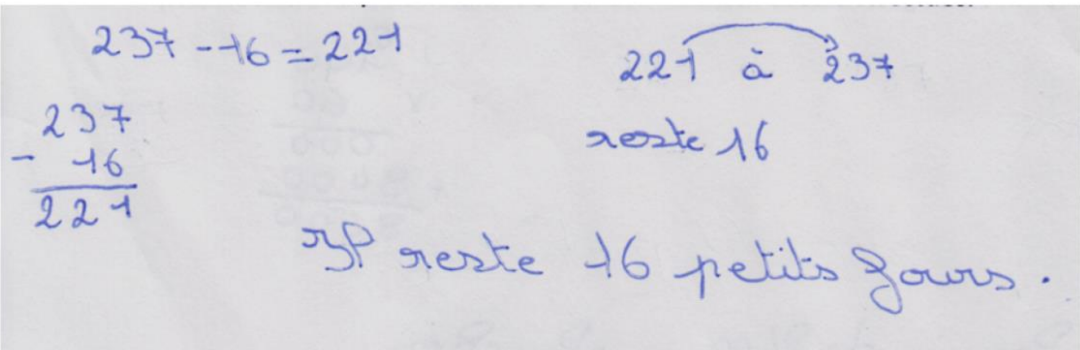
Réponse trouvée par multiplication et soustraction, sans erreur de calcul. Modélisation et interprétation du résultat correctes.

- Production 6



Réponse trouvée par division avec une erreur de calcul. Modélisation et interprétation du résultat correctes.

- Production 7



Une seule soustraction est réalisée (il manque l'itération). Modélisation et interprétation incorrectes.

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Les élèves devront connaître l'existence des différentes méthodes permettant de résoudre un problème de proportionnalité. Lors de temps de mise en commun, ils pourront comparer ces différentes méthodes et se rendre compte que, pour un exercice donné, certaines peuvent être plus efficaces que d'autres. On se gardera cependant de hiérarchiser ces méthodes, aucune n'étant plus « experte » que les autres ; l'élève doit apprendre à s'adapter face à un problème pour mobiliser une procédure lui permettant de le résoudre. Pour un élève donné, les procédures pouvant être utilisées pour résoudre un problème seront plus ou moins coûteuses au regard des connaissances dont il dispose au moment de la résolution, notamment en calcul mental.

La résolution de problèmes de proportionnalité est un terrain un terrain particulièrement fécond pour les interactions entre la langue française et le langage mathématique puisque la verbalisation en langage naturel des procédures utilisées (prendre le double, le triple, le tiers, le quadruple, d'une grandeur) contribue à la fois à l'élargissement du répertoire lexical et à la compréhension d'une notion mathématique.

Étudier des relations entre deux grandeurs permet d'effectuer de manière efficace des calculs en utilisant un langage mathématique adapté, par exemple celui des nombres décimaux ou des fractions.

- **Progressivité des apprentissages**

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie tout particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2. Les procédures rencontrées au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au cycle 4 où seront introduites, en fin de cycle, les fonctions linéaires. C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité : C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité :

- Au cycle 2, les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs.

Exemple : *Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?*

Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

- **Au cycle 3,** les premiers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la première année du cycle ; les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre). Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité). Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.

- **Au cycle 4,** toutes les procédures introduites au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ; ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions ; il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En fin de cycle, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

- **Procédures s'appuyant sur les propriétés de linéarité pour l'addition et la multiplication par un nombre**

Si 6 stylos coûtent 10 € et 3 stylos coûtent 5 €, Combien coûtent 9 stylos ? 6 stylos et 3 stylos 9 stylos 10 € et 5 € 15 €	Quelle est la hauteur d'une tour obtenue en empilant 40 cubes ? 40 cubes, c'est 10 fois 4 cubes 10 x 22 cm = 220 cm
Cette procédure est une utilisation en acte de la propriété additive	Cette procédure est une utilisation en acte de la propriété multiplicative
La propriété dite additive	**La propriété multiplicative**
Propriété de linéarité pour l'addition	Propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre

Le travail sur la proportionnalité est particulièrement propice au développement des six compétences travaillées en mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

Les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre doivent être le plus souvent possible explicitées et sont une opportunité pour travailler l'expression orale. Les procédures relatives à la linéarité sont les premières rencontrées. Les relations entre les nombres mis en jeu constituent une variable didactique avec laquelle l'enseignant peut jouer. En effet, les rapports entre les nombres en jeu et la connaissance des tables de multiplication dans les deux sens (composition-décomposition) par les élèves vont influer sur le choix de la procédure à privilégier.

Les tableaux de proportionnalité ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement; s'ils peuvent permettre de résumer clairement une situation proposée dans un problème, les opérations à réaliser pour résoudre un problème de proportionnalité au cycle 3 ne doivent pas se faire par un raisonnement sur des lignes ou des colonnes d'un tableau mais uniquement sur des cardinaux ou des grandeurs, en explicitant ce qui est fait, tant à l'oral qu'à l'écrit.

L'enseignant permet aux élèves de dégager les avantages et inconvénients de différentes procédures possibles mais ne les présente pas comme les seules procédures attendues lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité. En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui.

Exemples de réponses d'élèves :

Énoncé du problème n°6 :

> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 24 personnes ?

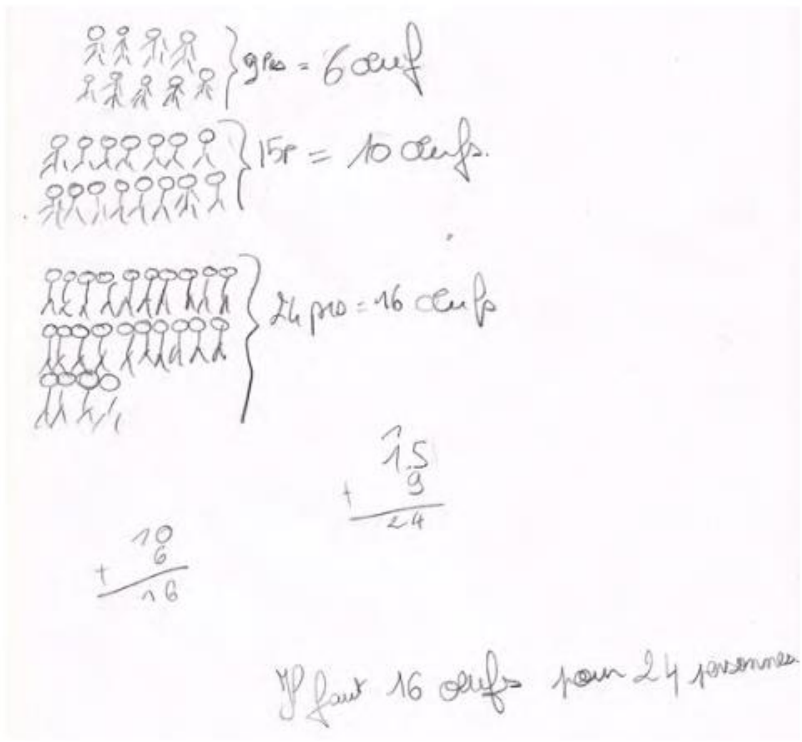
- **Elève A**

Pour 24 personne il faut 16 oeufs.

~~Il faut faire une division~~ Il faut faire des aditions

9+15=24 10+6=16

- **Elève B**



Les deux élèves ont utilisé ici une procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition[1]. Cette procédure est encouragée par l'énoncé. On aura noté ici qu'une seule des deux données aurait suffi pour répondre à la question posée, mais il aurait alors fallu utiliser une autre procédure.

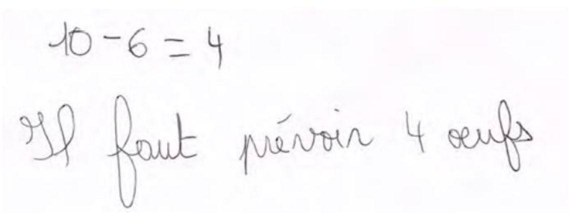
1. f (24) = f (9 + 15) = f (9) + f (15)

Énoncé du problème n°7 :

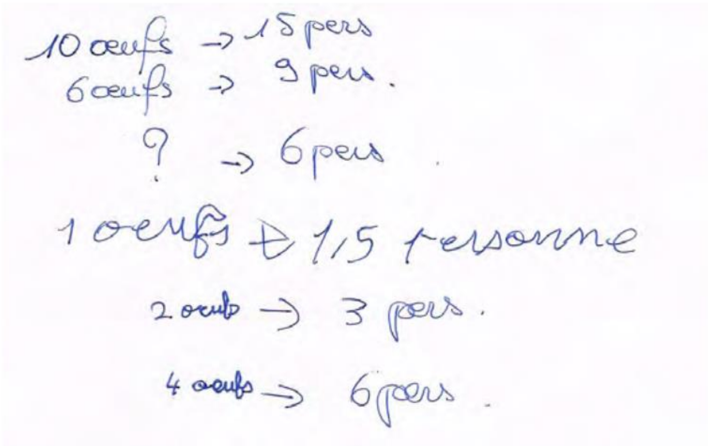
> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 6 personnes ?

- **Elève C**



- **Elève D**



L'élève C a utilisé ici une procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition[2]. Il a vu sans l'écrire que 15 personnes – 9 personnes = 6 personnes.
Cette procédure est encouragée par l'énoncé. On aura noté ici que, comme pour l'exercice précédent, une seule des deux données aurait suffi pour répondre à la question posée, mais il aurait alors fallu utiliser une autre procédure.

L'élève D a utilisé plusieurs fois la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre[3]. Il a écrit la seconde relation « 6 œufs à 9 pers. » dont il ne s'est finalement pas servi. En effet il a tiré de la relation « 10 œufs à 15 pers. », qu'il fallait 1 œuf pour 1,5 personne en divisant par 10 et en utilisant ses connaissances des nombres décimaux. En multipliant ensuite deux fois par 2 pour passer de 1,5 personne à 6 personnes, il a obtenu le nombre d'œufs cherchés.

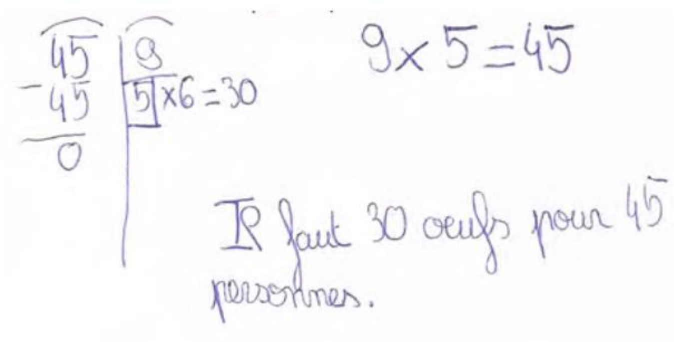
2. $f(6) = f(15 - 9) = f(15) - f(9)$

3. $f(6) = f(2 \times 2 \times 1{,}5) = 2 \times 2 \times f(1{,}5) = 4 \times f(0{,}1 \times 15) = 4 \times 0{,}1 \times f(15) = 0{,}4 \times 10 = 4$

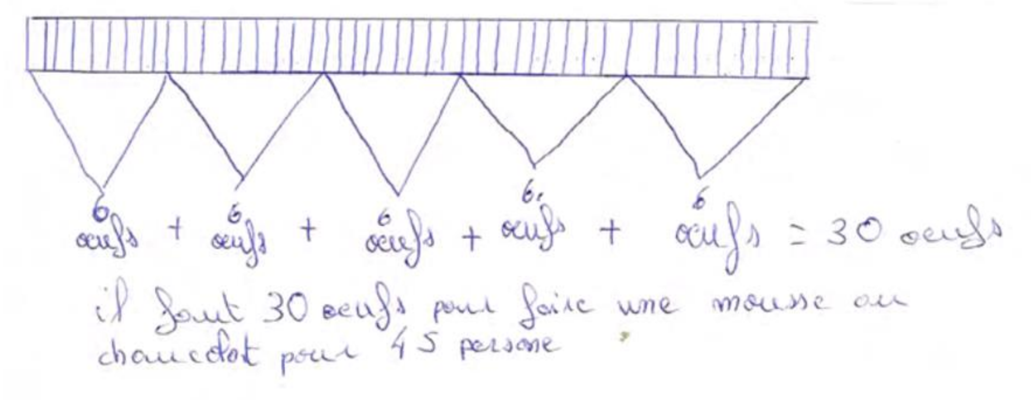
Énoncé du problème n°8 :

> Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.
>
> *Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 45 personnes ?*

- **Elève E**



- **Elève F**



L'élève E a utilisé une procédure s'appuyant sur la propriété de linéarité pour la multiplication[4] par un nombre. Cet exercice peut d'ailleurs être traité sans parler de proportionnalité, comme un exercice multiplicatif dès le cycle 2.

L'élève F a utilisé une procédure s'appuyant sur la propriété de linéarité pour l'addition, une addition itérée qui est ici très proche d'une multiplication.

4. $f(45) = f(5 \times 9) = 5 \times f(9) = 5 \times 6 = 30$

Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. Les procédures de traitement de ces problèmes, adaptées à leur structure, peuvent évoluer en fonction des nombres en jeu. L'organisation des calculs et leur réalisation contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul et des aptitudes de résolution de problèmes arithmétiques (le travail sur la technique et sur le sens devant se nourrir l'un l'autre).

EN VOUS SOUHAITANT UN EXCELLENT STAGE !!!

Ressources

- Programmes du cycle 3, en vigueur à compter de la rentrée de l'année scolaire 2018-19

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/2/Cycle_3_programme_consolide_1038202.pdf

- Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire (BO spécial n°3 du 26 avril 2018)

https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128731

- La résolution de problèmes à l'école élémentaire (BO spécial n°3 du 26 avril 2018)

https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=128735

- Le calcul en ligne au cycle 3

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/00/2/RA_16_C3_MATH_calcul_ligne_c3_N.D_601002.pdf

- Fractions et décimaux au cycle 3, annexe 4 : Le glisse-nombre

http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fractions_et_decimaux/42/2/RA16_C3_MATH_frac_dec_annexe_4_673422.pdf

- Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Proportionnalite/95/5/RA16_C3_MATH_doc_maitre_proport_N.D_576955.pdf

- Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3. Activité : Mousse au chocolat

http://cache.media.education.gouv.fr/file/Proportionnalite/22/3/RA16_C3_MATH_PROPO_MOUSSE_614223.pdf

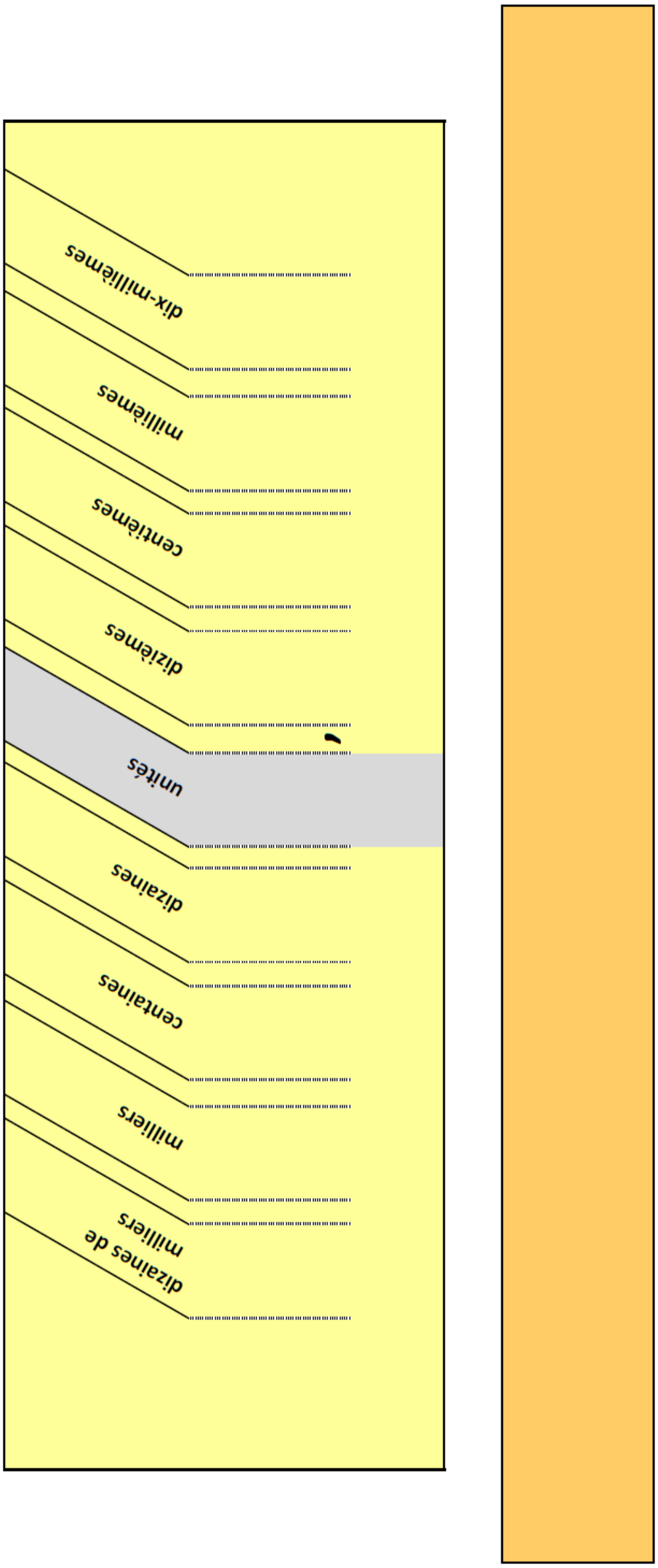
- Ressources pour l'évaluation en mathématiques

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/70/8/EV16_C3_Maths_Situations_d_evaluation_V2_revu_DIV_896708.pdf

- Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire en France. Approches didactique et ergonomique. (Thèse de Maryvonne PRIOLET, nov. 2007)

https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01640085/document

ANNEXE 1 : *Glisse-nombre à imprimer*



ANNEXE 2 – DOCUMENT ELEVE

Énoncé du problème n°1 :

> *M. Durand s'achète 5 paires de chaussures à 85,25 euros la paire.*
>
> *Quel sera le montant de son achat ?*

Énoncé du problème n°2 :

> *Julien achète 4 livres. Le prix d'un livre est 7,5 euros. Au rayon des surgelés, les escargots coûtent 4 euros la douzaine, les petits pois 12 euros le kg et les framboises 6 euros le kg.*

Manon achète 12 escargots et 4 kg de petits pois. Combien a-t-elle dépensé ?

Énoncé du problème n°3 :

> *M. Durand possède 250 euros. Il veut s'acheter des paires de chaussettes à 6 euros la paire. Combien de paires de chaussettes pourrait-il s'acheter ?*

Énoncé du problème n°4

> *Laurie a acheté deux livres à 12,30 euros. Elle a payé avec un billet de 50 euros.*
>
> *Quelle somme lui a-t-on rendue ?*

Énoncé du problème n°5 :

> *Mme Dupont élève des poules pour produire des œufs. Elle récolte ainsi 125 œufs chaque matin. Le dimanche, elle vend ses œufs dans des boîtes de 6 qu'elle vend 4,5 euros chacune.*
>
> *Combien d'euros gagne Mme Dupont chaque dimanche si elle vend toutes les boîtes (complètes) ?*

Énoncé du problème n°6 :

> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 24 personnes ?

Énoncé du problème n°7 :

> *Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.*

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 6 personnes ?

Énoncé du problème n°8 :

> Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.
>
> *Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 45 personnes ?*

Énoncé du problème n°9 :

> *Au marché, un kilogramme de fraises vaut 12€. Combien valent alors : 500 g de fraises ? 200 g de fraises ? 2 kg 250 g de fraises ?*

Énoncé du problème n°10 :

> *Si 5 litres d'essence coûtent 8 euros, combien coûtent 15 litres d'essence ?*

Énoncé du problème n°11 :

> *La recette pour un dessert au chocolat nécessite pour 4 personnes :*
> *100 g de sucre, 60 g de chocolat, 1 litre de lait.*
>
> *Quelle quantité de chaque ingrédient faudrait-il pour confectionner ce dessert pour 6 personnes ? 5 personnes ?*

Énoncé du problème n°12 :

> *Un pâtissier a réalisé 237 petits fours. Il les range en remplissant des boîtes qui peuvent contenir 16 petits fours chacune.*
>
> *Combien de petits fours reste-t-il ?*

Énoncé du problème n°13 :

> *Julie a payé 20 euros pour 4 œufs en chocolat. Sa cousine Estelle veut en acheter 6.*
>
> *Combien Estelle va-t-elle payer ?*

Énoncé du problème n°14 :

> *Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm.*
>
> *Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2000 de ces mêmes feuilles ?*

Énoncé du problème n°15 :

> *Une classe compte 27 élèves. Le maître distribue trois cahiers par élève. Il lui reste 19 cahiers. Combien le maître avait-il de cahiers avant cette distribution ?*

Énoncé du problème n°16 :

> *Les pommes sont vendues par sacs de 5 kg. Quel est le nombre de sacs nécessaires pour acheter 80 kg de pommes ?*